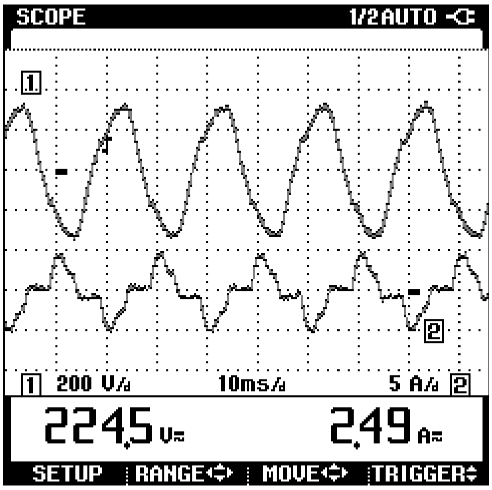
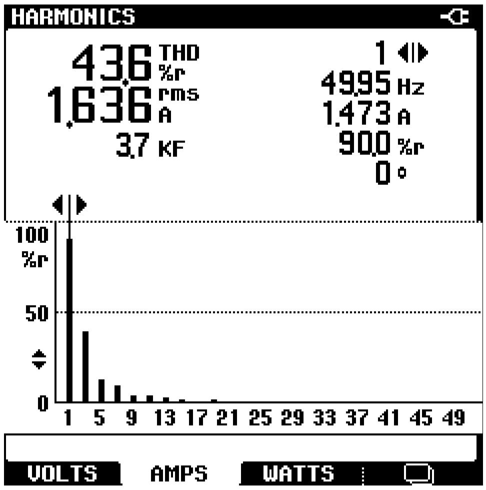
Puissances et harmoniques en électrotechnique

Version 1.1.4





(copie d'écran du Fluke 43B)

Sommaire

En régime monophasé, on s'intéresse à une charge (dipôle électrique) quelconque alimentée par une tension périodique de fréquence f (secteur 50 Hz).
Ce dipôle consomme un courant périodique de même fréquence f.

I- Définitions

I-1- Décomposition en série de Fourier

Au début du 19ème siècle, Joseph Fourier a montré qu'un signal périodique de fréquence f peut être décomposé avec des signaux sinusoïdaux de fréquence multiple entier de f.

Un signal périodique de fréquence f peut donc s'écrire comme la somme de :

- un terme constant qui correspond à la composante continue (c'est-à-dire la valeur moyenne dans le temps)
- un terme sinusoïdal de fréquence f (c'est le fondamental ou harmonique de rang 1)
- un terme sinusoïdal de fréquence 2f (harmonique de rang 2)
- un terme sinusoïdal de fréquence 3f (harmonique de rang 3)
- un terme sinusoïdal de fréquence 3f (harmonique de rang 4)
- etc …

Dans le cas d'un courant électrique de fréquence f :

$$
\begin{aligned}
& i(t) = \langle i \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} \cdot I_n \cdot \sin(n\omega t + \phi_n) \\
& = \langle i \rangle \quad \text{(valeur moyenne)} \\
& + \sqrt{2} \cdot I_1 \cdot \sin(\omega t + \phi_1) \quad \text{(fondamental ou harmonique de rang 1)} \\
& + \sqrt{2} \cdot I_2 \cdot \sin(2\omega t + \phi_2) \quad \text{(harmonique de rang 2)} \\
& + \sqrt{2} \cdot I_3 \cdot \sin(3\omega t + \phi_3) \quad \text{(harmonique de rang 3)} \\
& + ...
\end{aligned}
$$

avec :

- $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$: pulsation du fondamental (en radians par seconde)
- I_n : valeur efficace de l'harmonique de rang n (en ampères)
- ϕ_n : phase à l'origine de l'harmonique de rang n (en radians)

Pour la tension électrique v de fréquence f :

$$
\begin{aligned}
& v(t) = \langle v \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} \cdot V_n \cdot \sin(n\omega t + \phi_n + \varphi_n) \\
& = \langle v \rangle \quad \text{(valeur moyenne)} \\
& + \sqrt{2} \cdot V_1 \cdot \sin(\omega t + \phi_1 + \varphi_1) \quad \text{(fondamental)} \\
& + \sqrt{2} \cdot V_2 \cdot \sin(2\omega t + \phi_2 + \varphi_2) \quad \text{(harmonique de rang 2)} \\
& + \sqrt{2} \cdot V_3 \cdot \sin(3\omega t + \phi_3 + \varphi_3) \quad \text{(harmonique de rang 3)} \\
& + ...
\end{aligned}
$$

avec :

- V_n : valeur efficace de l'harmonique de rang n (en volts)
- $\phi_n + \varphi_n$: phase à l'origine de l'harmonique de rang n (en radians)
- φ_n : déphasage entre l'harmonique de rang n de la tension et l'harmonique de rang n du courant (en radians)

- Lien utile sur les harmoniques :

http://pagesperso-orange.fr/fabrice.sincere/application_builder5/education.htm#harmoniques

I-2- Valeur efficace (True RMS)

Par définition, la valeur efficace d'un courant périodique i(t) est :

$$\boxed{I = \sqrt{<i^2>} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} i(t)^2 dt}}$$

On montre que :

$$\boxed{I = \sqrt{<i>^2 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n{}^2} = \sqrt{<i>^2 + I_1{}^2 + I_2{}^2 + I_3{}^2 + ...}}$$

avec : I_n la valeur efficace de l'harmonique de rang n (en ampères)

Par définition, la valeur efficace d'une tension périodique v(t) est :

$$\boxed{V = \sqrt{<v^2>} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} v(t)^2 dt}}$$

On montre que :

$$\boxed{V = \sqrt{<v>^2 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n{}^2} = \sqrt{<v>^2 + V_1{}^2 + V_2{}^2 + V_3{}^2 + ...}}$$

avec : V_n la valeur efficace de l'harmonique de rang n (en volts)

I-3- Valeur efficace des harmoniques

Il s'agit de la valeur efficace de l'ensemble des harmoniques (à partir du rang 2).

Valeur efficace des courants harmoniques :

$$I_{HM} = \sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} I_n^{\ 2}} = \sqrt{I_2^{\ 2} + I_3^{\ 2} + ...}$$

On a :

$$I^2 = \langle i \rangle^2 + I_1^{\ 2} + I_{HM}^{\ 2}$$

Valeur efficace des tensions harmoniques :

$$V_{HM} = \sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} V_n^{\ 2}} = \sqrt{V_2^{\ 2} + V_3^{\ 2} + ...}$$

On a :

$$V^2 = \langle v \rangle^2 + V_1^{\ 2} + V_{HM}^{\ 2}$$

I-4- Taux de distorsion harmonique THD (en %)

Définition :

$$THD = \frac{\text{valeur efficace des harmoniques}}{\text{valeur efficace du fondamental}}$$

Pour le courant :

$$THD_i = 100 \cdot \frac{I_{HM}}{I_1} \quad \text{(en \%)}$$

Pour la tension :

$$THD_v = 100 \cdot \frac{V_{HM}}{V_1} \quad \text{(en \%)}$$

I-5- Puissance apparente S (en VA) de la charge

La puissance apparente de la charge est par définition :

$S = V \cdot I$

I-6- Puissance active P (en watts) consommée par la charge

Par définition, c'est la moyenne dans le temps de la puissance instantanée consommée par la charge.
C'est aussi la moyenne sur une période (T = 1/f) de la puissance instantanée :

$$P = \langle p \rangle = \langle v \cdot i \rangle = \frac{1}{T} \int_{t=0}^{T} v(t) i(t) dt$$

On montre que :

$$\begin{aligned}
P &= \langle v \rangle \langle i \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \cos \varphi_n \\
&= \langle v \rangle \langle i \rangle \quad \text{(contribution des composantes continues)} \\
&+ V_1 I_1 \cos \varphi_1 \quad \text{(contribution des fondamentaux)} \\
&+ V_2 I_2 \cos \varphi_2 \quad \text{(contribution des harmoniques de rang 2)} \\
&+ V_3 I_3 \cos \varphi_3 \quad \text{(contribution des harmoniques de rang 3)} \\
&+ \ldots
\end{aligned}$$

I-7- Puissance réactive Q (en vars) consommée par la charge

Par définition :

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \sin \varphi_n$$

$$\begin{aligned}
Q &= V_1 I_1 \sin \varphi_1 \quad \text{(contribution des fondamentaux)} \\
&+ V_2 I_2 \sin \varphi_2 \quad \text{(contribution des harmoniques de rang 2)} \\
&+ V_3 I_3 \sin \varphi_3 \quad \text{(contribution des harmoniques de rang 3)} \\
&+ \ldots
\end{aligned}$$

I-8- Facteur de puissance PF (Power Factor) de la charge

Par définition :

$$PF = \frac{P}{S}$$

Remarque : $| PF | \leq 1$

I-9- Facteur de déplacement DPF (Displacement Power Factor)

Par définition : $DPF = \cos \varphi_1$

φ_1 désigne le déphasage entre le fondamental de la tension et le fondamental du courant.

I-10- Puissance déformante

Par définition :

$$D = \sqrt{S^2 - (P^2 + Q^2)}$$

ou

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D^2$$

L'unité de la puissance déformante D est le VAD.

II- Cas d'une tension alternative purement sinusoïdale qui alimente un dipôle linéaire

C'est le cas que tout le monde connaît, et nous retrouverons les formules qui nous sont familières.

A l'heure des circuits électroniques (fortement non linéaires), il faut noter que les dipôles linéaires se font rares.

Parmi les dipôles linéaires, on peut cependant citer :

- ampoule à filament (à ne pas confondre avec l'ampoule basse consommation)
- radiateur électrique
- condensateur
- bobine
- moteur asynchrone sans variateur

Pour un dipôle linéaire :

- Tension alternative sinusoïdale de fréquence f $\Rightarrow$ courant alternatif sinusoïdal de fréquence f
- Le déphasage entre la tension et le courant ne dépend que de la fréquence.
- L'impédance Z = V / I ne dépend que de la fréquence.

Pour un courant alternatif, la composante continue est par définition nulle ($<i> = 0$ A).
Dans un courant purement sinusoïdal, il n'y a pas d'harmoniques de rang 2 et supérieur.
Un courant alternatif purement sinusoïdal se résume donc à son fondamental (harmonique de rang 1) :

$$i(t) = <i> + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} \cdot I_n \cdot \sin(n\omega t + \phi_n)$$

$$= \sqrt{2} \cdot I_1 \cdot \sin(\omega t + \phi_1)$$

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

Valeur efficace du courant i(t) :	$I = I_1$
Valeur efficace des courants harmoniques :	$I_{HM} = 0$ A
Taux de distorsion harmonique :	$THD_i = 0$ %

De même, l'expression d'une tension alternative purement sinusoïdale s'écrit :

$$v(t) = <v> + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} \cdot V_n \cdot \sin(n\omega t + \phi_n + \varphi_n)$$

$$= \sqrt{2} \cdot V_1 \cdot \sin(\omega t + \phi_1 + \varphi_1)$$

$$v(t) = \sqrt{2} \cdot V \cdot \sin(\omega t + \phi + \varphi)$$

Valeur efficace de la tension v(t) :	$V = V_1$
Valeur efficace des tensions harmoniques :	$V_{HM} = 0$ V
Taux de distorsion harmonique :	$THD_v = 0$ %

φ (= φ_1) est le déphasage de la tension v par rapport à i.

Puissance active P : $P = V_1 I_1 \cos\varphi_1 = VI\cos\varphi$

Puissance réactive Q : $Q = V_1 I_1 \sin\varphi_1 = VI\sin\varphi$

Puissance apparente S : $S = VI$

Puissance déformante D :

$$P^2 + Q^2 = (VI\cos\varphi)^2 + (VI\sin\varphi)^2$$
$$= (VI)^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = (VI)^2 = S^2$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$
$$D = \sqrt{S^2 - (P^2 + Q^2)}$$
$$\Rightarrow D = 0$$

Facteur de puissance (PF Power Factor) :

$$PF = \frac{P}{S} = \frac{VI\cos\varphi}{VI} = \cos\varphi$$

Facteur de déplacement (DPF Displacement Power Factor) :

Par définition : $DPF = \cos\varphi_1$

$\Rightarrow DPF = PF$

III- Cas d'une tension alternative purement sinusoïdale qui alimente un dipôle non linéaire

Les ***dipôles non linéaires*** sont aussi appelés ***charges déformantes*** (car déformation de la forme du courant, c'est-à-dire création d'harmoniques de courant).

Exemples de dipôles non linéaires :

- ampoule basse consommation
- éclairage néon
- alimentation à découpage
- ordinateur
- téléviseur
- moteur asynchrone avec variateur
- moteur à courant continu avec variateur

On suppose le courant alternatif : $<i> = 0$ A

$$I = \sqrt{<i>^2 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^{\,2}} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} I_n^{\,2}}$$
$$= \sqrt{I_1^{\,2} + I_2^{\,2} + I_3^{\,2} + \ldots}$$

Une tension alternative purement sinusoïdale se résume à son fondamental (harmonique de rang 1) :

Pour $n \geq 2$: $V_n = 0$ V

$V = V_1$

Puissance active :

$$P = <v><i> + \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \cos\varphi_n$$
$$= V_1 I_1 \cos\varphi_1$$
$$= V I_1 \cos\varphi_1$$

φ_1 est le déphasage entre la tension et le fondamental du courant.

Les harmoniques du courant (rang ≥ 2) ne jouent aucun rôle en ce qui concerne la puissance active.

Puissance réactive :

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \sin\varphi_n$$
$$= V_1 I_1 \sin\varphi_1$$
$$= V I_1 \sin\varphi_1$$

Les harmoniques du courant (rang ≥ 2) ne jouent aucun rôle en ce qui concerne la puissance réactive.

Puissance déformante :

$$D = \sqrt{S^2 - (P^2 + Q^2)}$$
$$= \sqrt{(VI)^2 - (VI_1)^2}$$
$$= V\sqrt{I^2 - I_1^{\,2}}$$

$$\boxed{D = V \cdot I_{HM}}$$

La puissance déformante est directement liée à la présence des harmoniques de courant (rang ≥ 2).

Facteur de puissance :

$$PF = \frac{P}{S} = \frac{VI_1 \cos\varphi_1}{VI} = \frac{I_1}{I}\cos\varphi_1 = \frac{I_1}{\sqrt{I_1^{\,2} + I_{HM}^{\,2}}}\cos\varphi_1$$

$$PF = \frac{\cos\varphi_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{THD_i\,(\text{en }\%)}{100}\right)^2}} = \frac{DPF}{\sqrt{1 + \left(\frac{THD_i\,(\text{en }\%)}{100}\right)^2}}$$

Quand le taux de distorsion harmonique du courant (THD_i) augmente, le facteur de puissance diminue.

Le terme **cos φ_1** est aussi appelé **facteur de déplacement** (DPF : Displacement Power Factor).

On a : $PF < DPF$

THD_i	Facteur de puissance PF (pour DPF = 1)
0 % (charge linéaire)	1
10 %	0,995
20 %	0,981
50 %	0,894
100 %	0,707
150 %	0,555
200 %	0,447

On retiendra que les charges déformantes dégradent le facteur de puissance.

Ainsi, pour une ampoule basse consommation (dipôle fortement non linéaire), le facteur de puissance est de l'ordre de 0,6…
Pour une ampoule à filament (dipôle linéaire), le facteur de puissance est pratiquement égal à 1.
Mais l'ampoule basse consommation a le gros avantage de consommer 5 fois moins de puissance active (en watts) que l'ampoule à filament !

IV- Cas d'une tension non sinusoïdale

En pratique, la tension du secteur n'est jamais complètement sinusoïdale : il y a des harmoniques de tension.
La présence d'harmoniques de tension est la conséquence des charges non linéaires qui créent des harmoniques de courant.
L'impédance de source du secteur n'est jamais complément nulle (impédance de lignes, impédance des transformateurs …) : la déformation du courant entraîne une déformation de la tension.

En résumé : charges non linéaires ⇒ harmoniques de courant ⇒ harmoniques de tension

Si le taux de distorsion harmonique de la tension est faible (quelques %) et que le taux de distorsion harmonique du courant est élevé, on peut écrire :

$$P \approx VI_1 \cos \varphi_1$$

$$Q \approx VI_1 \sin \varphi_1$$

$$D \approx V \cdot I_{HM} = V\sqrt{I^2 - I_1{}^2}$$

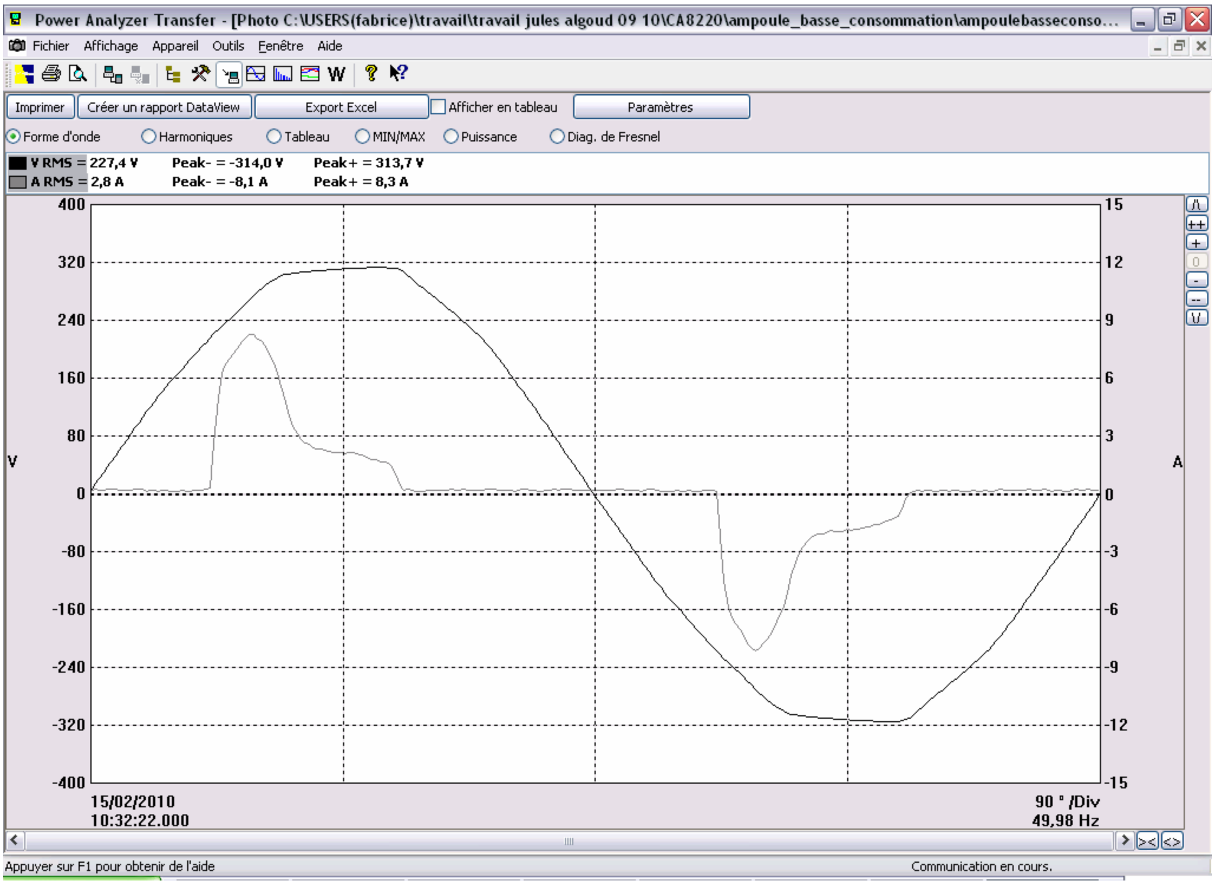
$$PF \approx \frac{DPF}{\sqrt{1+\left(\frac{THD_i\,(\text{en }\%)}{100}\right)^2}}$$

V- Mesures sur des ampoules basses consommations avec l'analyseur de puissances CA8220 (Chauvin Arnoux)

On s'intéresse à une installation monophasée de 30 ampoules basses consommations (OSRAM Duluxe EL 15 W / 840 120 mA 230 V 50 Hz).

L'analyseur de puissances CA8220 est associé à une sonde de courant E3N.

- Chronogrammes de la tension et du courant

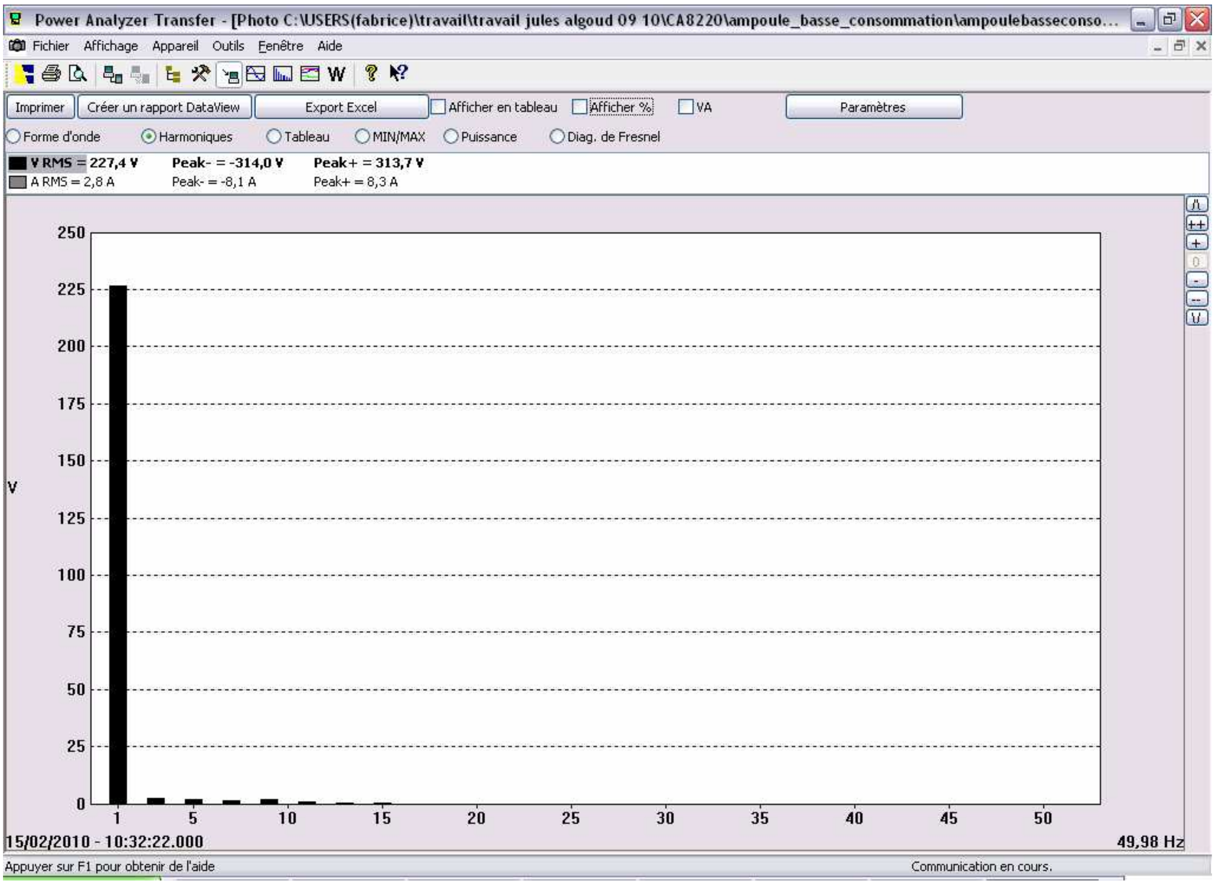


Fréquence : 49,98 Hz

Valeur efficace de la tension : V = 227,4 V

Valeur efficace du courant : I = 2,81 A

- Spectre de la tension



On remarque l'absence d'harmonique de rangs pairs, car il y a une symétrie de glissement :

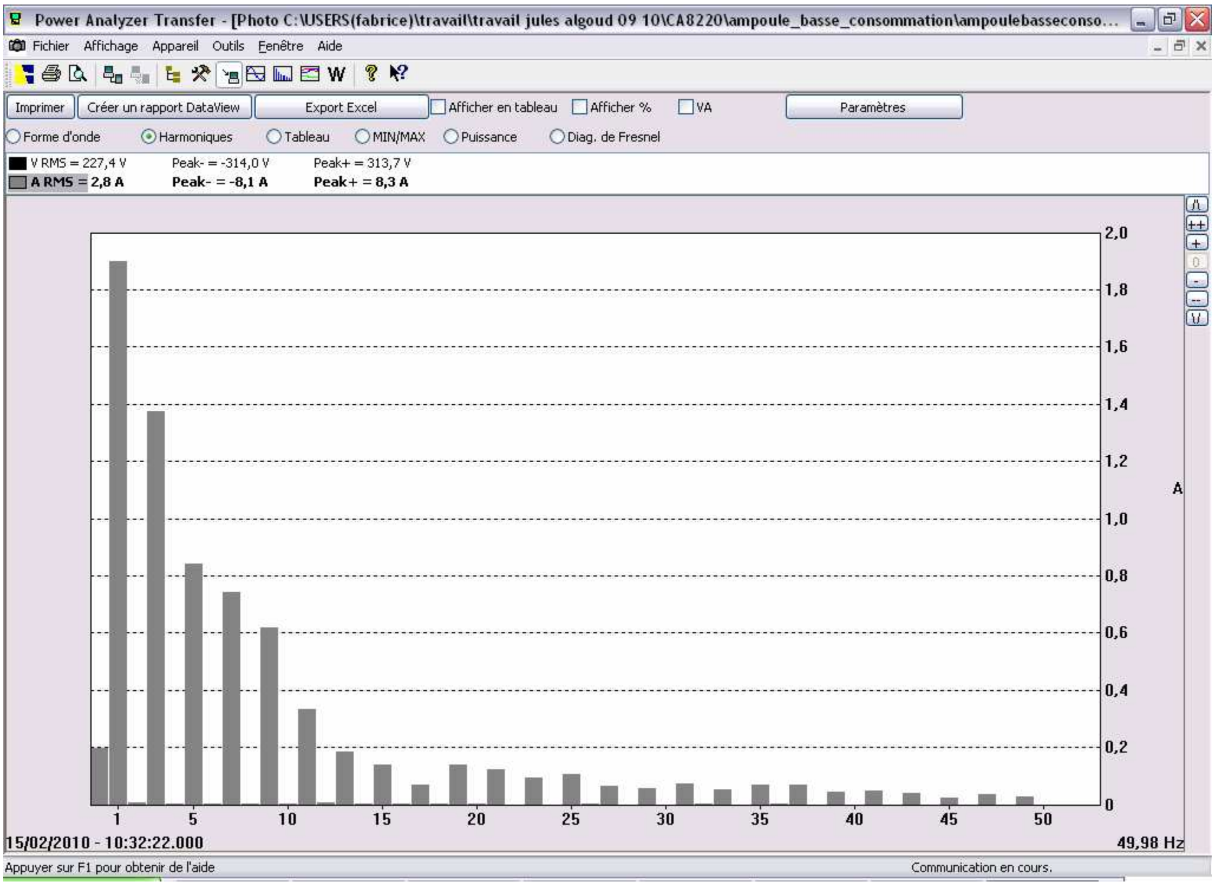
$$v\left(t+\frac{T}{2}\right)=-v(t)$$

Valeur efficace du fondamental : V_1 = 227,3 V

Valeur efficace de la tension harmonique : V_{HM} = 4,4 V

Taux de distorsion harmonique : $THD_v = V_{HM} / V_1$ = 1,9 %
(c'est conforme à la norme CEI 61000-2-2)

- Spectre du courant



On remarque l'absence d'harmonique de rangs pairs, car il y a une symétrie de glissement :

$$i\left(t+\frac{T}{2}\right)=-i(t)$$

Valeur efficace du fondamental : I_1 = 1,95 A

Valeur efficace du courant harmonique : I_{HM} = 2,01 A

Taux de distorsion harmonique : $THD_i = I_{HM} / I_1$ = 103 %

L'ampoule basse consommation est fortement non linéaire.

- **Puissances**

Puissance apparente : S = VI = 638,7 VA

Puissance active : P = 406,3 W

Facteur de puissance : PF = P/S = 0,636

Déphasage entre le fondamental de la tension et le fondamental du courant : $\varphi_1 = -23{,}5°$
(le courant est en avance sur la tension)

Facteur de déplacement : DPF = cos φ_1 = 0,916 (> PF)

Puissance réactive : Q = –177,8 vars

L'ampoule basse consommation a un comportement capacitif (elle génère de la puissance réactive).

Puissance déformante : D = 459,6 VAD

L'ampoule basse consommation est source de « pollution harmonique ».

- Remarque

Nous sommes dans le cas où le taux de distorsion harmonique de la tension est petit (1,9 %), et négligeable par rapport au taux de distorsion harmonique du courant (103 %).
Donc, en première approximation :

$$P \approx VI_1 \cos\varphi_1 = 407{,}3\ \mathrm{W}$$
$$Q \approx VI_1 \sin\varphi_1 = -177{,}5\ \mathrm{vars}$$

$$D \approx V \cdot I_{HM} = V\sqrt{I^2 - I_1{}^2} = 456{,}5\ \mathrm{VAD}$$

$$PF \approx \frac{DPF}{\sqrt{1+\left(\frac{THD_i\,(\text{en }\%)}{100}\right)^2}} = 0{,}639$$

Bibliographie

- A. Perez – N. Bravo – M. Anton – F. Eddi

La menace des harmoniques : Mesure, analyse et solutions.
Edité par Elektor.

- Wildi – Sybille

Electrotechnique.
Editions De Boeck.

- Alain Charoy : CEM, Parasites et perturbations des électroniques ; Editions Dunod
- Mode d'emploi du Fluke 41B (Power Harmonics Analyser)
- Mode d'emploi du Fluke 43B (Power Quality Analyser)
- Mode d'emploi de la pince Chauvin Arnoux F27 (pince de puissances et d'harmoniques)
- Mode d'emploi du Chauvin Arnoux CA8220 (analyseur de puissances)
- Site web de Schneider Electric : cahiers techniques n°152, 183 et 202
- Site web de Merlin-Gerin

Formation :

Licence professionnelle « Gestion et Contrôle de l'Energie Electrique » (Université Henri Poincaré, Nancy 1).
Cette licence traite en particulier des solutions à la problématique de la pollution des réseaux électriques par les harmoniques de courant.

Annexe

Extrait de la norme CEI 61000-2-2 :
Niveaux de compatibilité pour les perturbations conduites basse fréquence sur les réseaux publics d'alimentation basse tension

Les niveaux tolérables pour les tensions harmoniques sur les réseaux basse tension 50 Hz sont détaillés dans le tableau ci-dessous :

Harmoniques impairs				Harmoniques pairs	
Non multiples de 3		Multiples de 3			
Rang n	% du fondamental	Rang n	% du fondamental	Rang n	% du fondamental
5	6 %	3	5 %	2	2 %
7	5 %	9	1,5 %	4	1 %
11	3,5 %	15	0,3 %	6	0,5 %
13	3 %	21	0,2 %	8	0,5 %
17	2 %	> 21	0,2 %	10	0,5 %
19	1,5 %	/	/	12	0,2 %
23	1,5 %	/	/	> 12	0,2 %
25	1,5 %	/	/	/	/
> 25	$0{,}2 + 0{,}5 \times 25/n$	/	/	/	/

Le taux de distorsion harmonique (THD) en BT doit ainsi rester inférieur à **8 %**